

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
Введение	12
Раздел I. Средние функции и обобщенные производные	17
Глава 1. Средние функции	17
§ 1. Усредняющее ядро	17
§ 2. Средние функции	19
§ 3. Сходимость средних функций	21
Упражнения	24
Глава 2. Обобщенные производные	25
§ 1. Понятие обобщенной производной	25
§ 2. Простейшие свойства обобщенной производной	31
§ 3. Предельные свойства обобщенных производных	33
§ 4. Случай одной независимой переменной	34
§ 5. Соболевские пространства и теоремы вложения	36
Упражнения	37
Раздел II. Элементы вариационного исчисления	39
Глава 3. Основные понятия	39
§ 1. Примеры на экстремум функционала	39
§ 2. Постановка задачи вариационного исчисления	41
§ 3. Вариация и градиент функционала	44
§ 4. Уравнение Эйлера	52
§ 5. Вторая вариация. Достаточное условие экстремума	56
§ 6. Изопериметрическая задача	57
§ 7. Минимизирующая последовательность	63
Упражнения	64
Глава 4. Функционалы, зависящие от числовых функций вещественных переменных	66
§ 1. Простейшая задача вариационного исчисления	66
§ 2. Исследование второй вариации	69
§ 3. Случай многих независимых переменных	72
§ 4. Функционалы, зависящие от производных высших порядков	75
§ 5. Функционалы, зависящие от нескольких функций	78
§ 6. Естественные краевые условия	80

Глава 5. Минимум квадратичного функционала	89
§ 1. Понятие о квадратичном функционале	89
§ 2. Положительно определенные операторы	91
§ 3. Энергетическое пространство	97
§ 4. Задача о минимуме квадратичного функционала	106
§ 5. Обобщенное решение	109
§ 6. О сепарабельности энергетического пространства	112
§ 7. Расширение положительно определенного оператора	115
§ 8. Простейшая краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения	120
§ 9. Более общая задача о минимуме квадратичного функционала	126
§ 10. Случай только положительного оператора	130
Упражнения	130
Глава 6. Собственный спектр положительно определенного оператора	132
§ 1. Понятие о собственном спектре оператора	132
§ 2. Собственные числа и собственные элементы симметричного оператора	134
§ 3. Обобщенный собственный спектр положительно определенного оператора	135
§ 4. Вариационная формулировка задачи о собственном спектре	138
§ 5. Теорема о наименьшем собственном числе	141
§ 6. Теорема о дискретности спектра	144
§ 7. Задача Штурма — Лиувилля	148
§ 8. Элементарные случаи	154
§ 9. Минимаксимальный принцип	155
§ 10. О росте собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля	158
Упражнения	160
Раздел III. Элементы теории интегральных уравнений	161
Глава 7. Вполне непрерывные операторы	161
§ 1. Необходимые сведения из функционального анализа	161
§ 2. Оператор Фредгольма	163
§ 3. Интегральный оператор со слабой особенностью	166
§ 4. Операторы со слабой особенностью в пространстве непрерывных функций	170
Упражнения	173
Глава 8. Теория Фредгольма	174
§ 1. Уравнения с в. н. о. Интегральные уравнения	174
§ 2. Сведение к конечномерному уравнению. Доказательство первой и второй теорем Фредгольма	177
§ 3. Доказательство третьей теоремы Фредгольма	180
§ 4. Доказательство четвертой теоремы Фредгольма	182
§ 5. Альтернатива Фредгольма	185
§ 6. О непрерывности решений уравнения со слабой особенностью	187

Раздел IV. Общие сведения об уравнениях в частных производных	190
Глава 9. Уравнения и краевые задачи	190
§ 1. Дифференциальное выражение и дифференциальное уравнение	190
§ 2. Классификация уравнений второго порядка	192
§ 3. Краевые условия и краевые задачи	196
§ 4. Задача Коши	200
§ 5. Проблемы существования, единственности и корректности для краевой задачи	202
Глава 10. Характеристики. Канонический вид. Формулы Грина	207
§ 1. Преобразование независимых переменных	207
§ 2. Характеристики. Соотношение между данными Коши на характеристике	209
§ 3. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду	212
§ 4. Случай двух независимых переменных	213
§ 5. Формально сопряженные дифференциальные выражения	216
§ 6. Формулы Грина	217
Раздел V. Уравнения эллиптического типа	222
Глава 11. Уравнение Лапласа и гармонические функции	222
§ 1. Основные понятия	222
§ 2. Сингулярное решение уравнения Лапласа	225
§ 3. Интегральное представление функций класса $C^{(2)}$	226
§ 4. Интегральное представление гармонической функции	229
§ 5. Понятие о потенциалах	231
§ 6. Свойства объемного потенциала	234
§ 7. Теорема о среднем	241
§ 8. Принцип максимума	245
§ 9. О сходимости последовательностей гармонических функций	247
§ 10. Распространение на уравнения с переменными коэффициентами	251
Глава 12. Задачи Дирихле и Неймана	259
§ 1. Постановка задач	259
§ 2. Теоремы единственности для уравнения Лапласа	261
§ 3. Решение задачи Дирихле для шара	265
§ 4. Теорема Лиувилля	272
§ 5. Задача Дирихле для внешности сферы	273
§ 6. Производные гармонической функции на бесконечности	274
§ 7. Теорема единственности для внешней задачи Неймана	275
Глава 13. Элементарные решения задач Дирихле и Неймана	278
§ 1. Задачи Дирихле и Неймана для круга	278
§ 2. Задача Дирихле для кругового кольца	283
§ 3. Применение конформного преобразования	284

§ 4. Сферические функции и их свойства	288
§ 5. Задачи Дирихле и Неймана, решаемые с помощью сферических функций	291
Упражнения	295
Глава 14. Вариационный метод в задаче Дирихле. Другие положительно определенные задачи	296
§ 1. Неравенство Фридрихса	296
§ 2. Оператор задачи Дирихле	298
§ 3. Энергетическое пространство задачи Дирихле	302
§ 4. Обобщенное решение задачи Дирихле	306
§ 5. Задача Дирихле для однородного уравнения	308
§ 6. О существовании вторых производных решения задачи Дирихле	311
§ 7. Эллиптические уравнения высших порядков и системы уравнений	313
§ 8. Задача Дирихле для бесконечной области	317
Упражнения	320
Глава 15. Спектр задачи Дирихле	321
§ 1. Интегральное представление функции, равной нулю на границе конечной области	321
§ 2. Спектр задачи Дирихле для конечной области	323
§ 3. Элементарные случаи	324
§ 4. Оценка роста собственных чисел	328
Глава 16. Задача Неймана	333
§ 1. Случай положительного $C(x)$	333
§ 2. Случай $C(x) \equiv 0$	335
§ 3. Интегральное представление С. Л. Соболева	337
§ 4. Исследование оператора \mathfrak{M}_0	340
§ 5. Обобщенное решение задачи Неймана	344
Упражнения	346
Глава 17. Несамосопряженные эллиптические уравнения	347
§ 1. Обобщенное решение	347
§ 2. Теоремы Фредгольма	349
Глава 18. Метод потенциалов для однородного уравнения Лапласа	353
§ 1. Поверхности Ляпунова	354
§ 2. Телесный угол	359
§ 3. Потенциал двойного слоя и его прямое значение	365
§ 4. Интеграл Гаусса	367
§ 5. Предельные значения потенциала двойного слоя	370
§ 6. Непрерывность потенциала простого слоя	374
§ 7. Нормальная производная потенциала простого слоя	377
§ 8. Сведение задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям	382
§ 9. Задачи Дирихле и Неймана в полупространстве	384

§ 10.	Исследование первой пары сопряженных уравнений . . .	386
§ 11.	Исследование второй пары сопряженных уравнений . . .	388
§ 12.	Решение внешней задачи Дирихле	391
§ 13.	Случай двух независимых переменных	394
§ 14.	Уравнения теории потенциала для круга	400
Глава 19. Задача о кривой производной		403
§ 1.	Постановка задачи	403
§ 2.	Оператор Гильберта	405
§ 3.	Уравнения с оператором Гильберта	410
§ 4.	Число решений и индекс задачи о кривой производной на двумерной плоскости	418
Раздел VI. Нестационарные уравнения		421
Глава 20. Уравнение теплопроводности		422
§ 1.	Уравнение теплопроводности и его характеристики . . .	422
§ 2.	Принцип максимума	424
§ 3.	Задача Коши и смешанная задача	427
§ 4.	Теоремы единственности	429
§ 5.	Абстрактные функции вещественной переменной	431
§ 6.	Обобщенное решение смешанной задачи	432
Глава 21. Волновое уравнение		436
§ 1.	Понятие о волновом уравнении	436
§ 2.	Смешанная задача и ее обобщенное решение	437
§ 3.	Волновое уравнение с постоянными коэффициентами. Задача Коши. Характеристический конус	441
§ 4.	Теорема единственности для задачи Коши. Область зависимости	442
§ 5.	Явление распространения волн	445
§ 6.	Обобщенное решение задачи Коши	447
Глава 22. Метод Фурье		451
§ 1.	Метод Фурье для уравнения теплопроводности	451
§ 2.	Обоснование метода	453
§ 3.	О существовании классического решения. Частный случай	457
§ 4.	Метод Фурье для волнового уравнения	459
§ 5.	Обоснование метода для однородного уравнения	462
§ 6.	Обоснование метода для однородных начальных условий	466
§ 7.	Уравнение колебаний струны. Условия существования классического решения	468
Глава 23. Задача Коши для уравнения теплопроводности		472
§ 1.	Некоторые свойства преобразования Фурье	472
§ 2.	Вывод формулы Пуассона	477
§ 3.	Обоснование формулы Пуассона	481
§ 4.	Бесконечная скорость теплопередачи	485

Глава 24. Задача Коши для волнового уравнения	486
§ 1. Применение преобразования Фурье	486
§ 2. Преобразование решения	489
§ 3. Случай трехмерного пространства	493
§ 4. Обоснование формулы Кирхгофа	495
§ 5. Задний фронт волны	498
§ 6. Случай $m = 2$ (уравнение колебаний мембраны)	500
§ 7. Уравнение колебаний струны	501
§ 8. Волновое уравнение с переменными коэффициентами	503
Раздел VII. Корректные и некорректные задачи	507
Глава 25. О корректности задач математической физики	507
§ 1. Основная теорема	507
§ 2. Положительно определенные задачи	509
§ 3. Задача Дирихле для однородного уравнения Лапласа	510
§ 4. Внешняя задача Неймана	511
§ 5. Внутренняя задача Неймана	514
§ 6. Задачи теплопроводности	517
§ 7. Задачи для волнового уравнения	519
§ 8. О некорректности задач математической физики	521
Добавления	524
Добавление 1. Эллиптические системы	524
Добавление 2. О задаче Коши для гиперболических уравнений. <i>В. М. Бабич</i>	532
Добавление 3. Некоторые вопросы теории общих дифференциальных операторов. <i>В. Г. Мазья</i>	545
Добавление 4. Нелинейные эллиптические уравнения второго порядка. <i>И. Я. Бакельман</i>	555
Литература	569
Предметный указатель	574